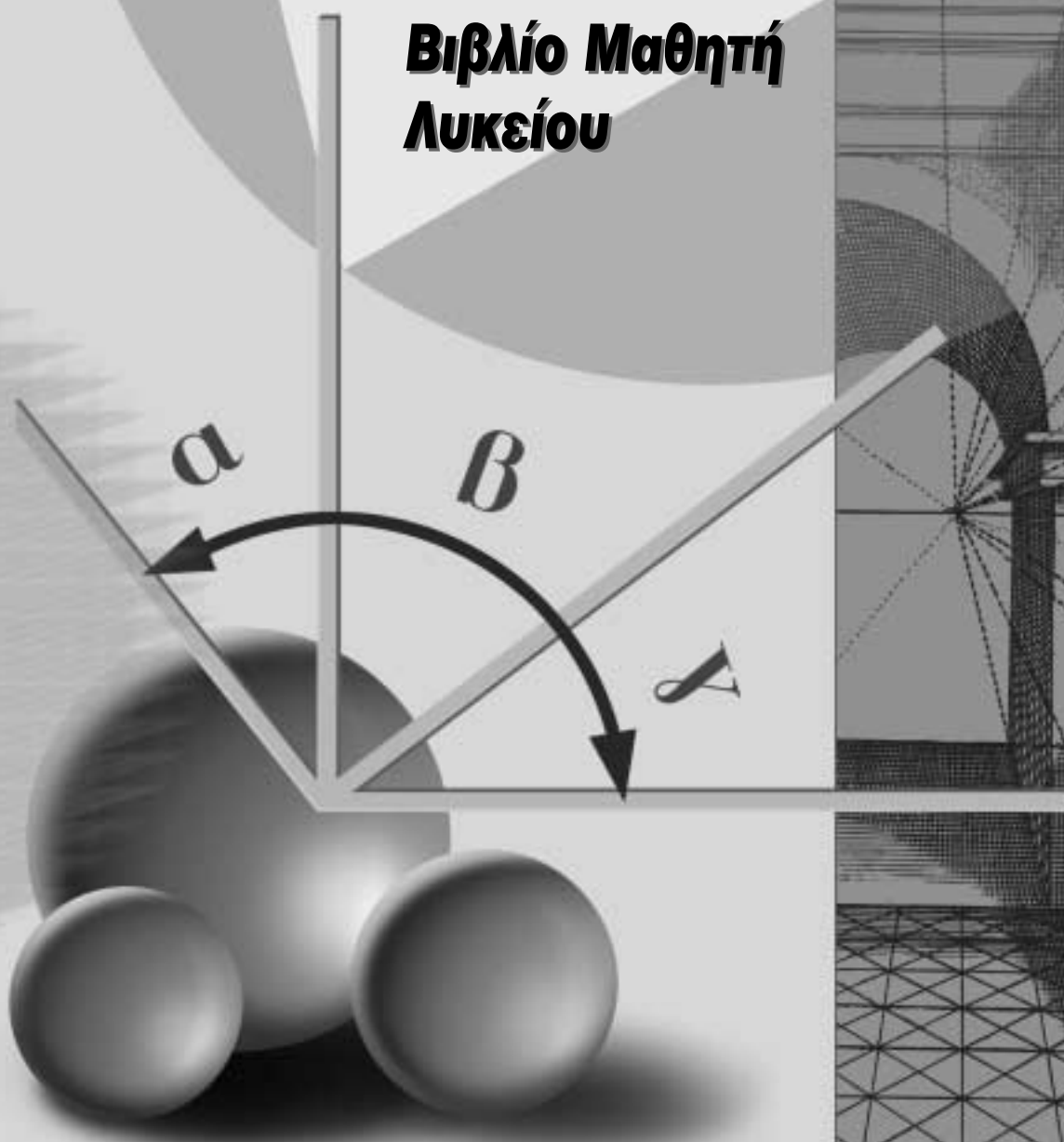




# *Cabri - geometry II*

**Βιβλίο Μαθητή  
Λυκείου**



Ινστιτούτο  
Τεχνολογίας  
Υπολογιστών



ΕΚΔΟΣΕΙΣ  
ΚΑΣΤΑΝΙΩΤΗ  
*inter@ctive*





**ΒΙΒΛΙΟ ΜΑΘΗΤΗ ΛΥΚΕΙΟΥ**

CABRI-GEOMETRY II: ΒΙΒΑΙΟ ΜΑΘΗΤΗ ΛΥΚΕΙΟΥ

**Συγγραφέας:** Μαρία Κορδάκη

Το λογισμικό **Cabri – geometry II** είναι προϊόν του IMAG (Ινστιτούτο για την Πληροφορική και τα Εφαρμοσμένα Μαθηματικά) του Πανεπιστημίου Joseph Fourier της Γκρενόμπλ, και του CNRS (Εθνικό Κέντρο Επιστημονικής Έρευνας της Γαλλίας).

Το λογισμικό αυτό είναι αποτέλεσμα της εργασίας μιας επιστημονικής ομάδας αποτελούμενης από μαθηματικούς, καθηγητές και επιστήμονες της πληροφορικής, στα πλαίσια του παραπάνω εργαστηρίου.

Η συνολική προσπάθεια υποστηρίχθηκε από το Γραφείο Νέων Τεχνολογιών για την Εκπαίδευση του υπουργείου Παιδείας της Γαλλίας, στο Παρίσι.

Στη Γαλλία η έκδοση που υποστηρίζεται από τα Windows διανεμήθηκε σύμφωνα με την άδεια χρήσης λογισμικού «Licence Mixte» από το γαλλικό υπουργείο Παιδείας (1997).

Το λογισμικό **Cabri – geometry II** εξελληνίστηκε και διατίθεται αρχικά για χρήση στα Γυμνάσια, Λύκεια και ΤΕΕ που συμμετέχουν στην **Οδύσσεια – «Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας»**, το εθνικό πρόγραμμα που αφορά την παιδαγωγική ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, και είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιου σχεδιασμού και υλοποίησης (1996-2001). Το 2001 στα 385 σχολεία της **Οδύσσειας** καθηγητές όλων των ειδικοτήτων αξιοποιούν υπολογιστές και δίκτυα στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους. Στο **Σχολικό Εργαστήριο της Κοινωνίας της Πληροφορίας** υποστηρίζεται η διδασκαλία όλων των μαθημάτων με διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Στο Γ' ΚΠΣ προβλέπεται η χρηματοδότηση της σταδιακής εξάπλωσης της **Οδύσσειας** σε περισσότερα σχολεία της χώρας μας.

**Διεύθυνση έργου:** Γιώργος Σορολοπίδης

**Αναπληρωτές υπεύθυνοι έργου:** Αρετή Βασιλογλου/Μαρία Καντήρου

**Μετάφραση λογισμικού και οδηγού χρήσης:** ORCO S.A.

**Επιστημονική και παιδαγωγική επιμέλεια:** Μαρία Κορδάκη

**Εκδοτική επιμέλεια:** Πάνος Ζευγώλης

**Επιμέλεια κειμένων:** Αντωνέτα Κώτση

**Υπεύθυνη παρακολούθησης υποέργων ΚΙΡΚΗΣ:** Σίλια Ρονιώτη

**Σύνδεσμος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου:** Κώστας Γαβρζήλης

**Σύνδεσμος Ινστιτούτου Τεχνολογίας Υπολογιστών:** Βασίλης Δαγδιλέλης

**ISBN 960-03-3216-9**

© Copyright Λογισμικού CABRILOG 1997. Αποκλειστική διάθεση για την ελληνική γλώσσα σε όλο τον κόσμο Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε., Αθήνα 2001

© Copyright Βιβλίου μαθητή Λυκείου Μαρία Κορδάκη – Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε., Αθήνα 2001

Απαγορεύεται η αναδημοσίευση ή αναπαραγωγή του παρόντος έργου στο σύνολό του ή τμημάτων του με οποιονδήποτε τρόπο, καθώς και η μετάφραση ή διασκευή του ή εκμετάλλευσή του με οποιονδήποτε τρόπο αναπαραγωγής έργου λόγου ή τέχνης, σύμφωνα με τις διατάξεις του ν. 2121/1993 και της Διεθνούς Σύμβασης Βέρνης-Παρισιού, που κυρώθηκε με το ν. 100/1975. Επίσης απαγορεύεται η αναπαραγωγή της στοιχειοθεσίας, της σελδοποίησης, του εξωφύλλου και γενικότερα της όλης αισθητικής εμφάνισης του βιβλίου, με φωτοτυπίες, ηλεκτρονικές ή οποιεσδήποτε άλλες μεθόδους, σύμφωνα με το άρθρο 51 του ν. 2121/1993. Κατόπιν ειδικής συμφωνίας με το ΥΠ.Ε.Π.Θ. επιτρέπεται η εκμετάλλευσή του εξελληνισμένου προϊόντος με αντικείμενο τη χρήση του στα Ελληνικά Σχολικά Εργαστήρια σύμφωνα με το άρθρο 7, παρ. νί της σύμβασης με το ΙΤΥ για το Έργο Προσαρμογής Διεθνούς Εκπαιδευτικού Λογισμικού στο Ελληνικό Εκπαιδευτικό Σύστημα – Ε24 ΚΙΡΚΗ.

**Επικοινωνία:**

Cabri – LEIBNIZ-IMAG

46 Avenue Félix Viallet

38031 Grenoble Cedex, France

Τηλ.: (33) 04 76 57 50 58, φαξ: (33) 04 76 57 50 57

www.cabri.net – e-mail: cabri@imag.fr

Εκδόσεις Καστανιώτη Α.Ε.

Ζαλόγγου 11, 106 78 Αθήνα

Τηλ.: (01) 33 01 208, φαξ: (01) 38 22 530

www.kastaniotis.com/cabri – e-mail: cabri@kastaniotis.com

## ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

Πρόλογος.....	5
---------------	---

### *A' Τάξη Λυκείου*

1. Γωνίες και κάθετες ευθείες.....	9
Δραστηριότητα 1α.....	9
Δραστηριότητα 1β.....	10
2. Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα.....	11
3. Κριτήρια ισότητας τριγώνων.....	13
4. Γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες.....	15
Δραστηριότητα 1α – Γωνίες με πλευρές κάθετες.....	15
Δραστηριότητα 1β – Γωνίες με πλευρές παράλληλες.....	16
5. Παραλληλόγραμμα.....	21
Δραστηριότητα 1α.....	21
Δραστηριότητα 1β.....	24
6. Εγγεγραμμένα τετράπλευρα.....	27
7. Γεωμετρικοί τόποι.....	29
Δραστηριότητα 1.....	29
Δραστηριότητα 2.....	29
Δραστηριότητα 3.....	31
8. Θεώρημα του Θαλή.....	33
Δραστηριότητα 1.....	33
Δραστηριότητα 2.....	34
Δραστηριότητα 1 – Ομοιότητα.....	34

### *B' Τάξη Λυκείου*

1. Το πυθαγόρειο θεώρημα.....	37
2. Γενίκευση πυθαγόρειου θεωρήματος.....	39
3. Στη διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο.....	41

4. Δύναμη σημείου ως προς κύκλο.....	43
5. Εμβαδόν ορθογώνιου.....	47
6. Εμβαδόν παραλληλόγραμμου.....	49
7. Εμβαδόν τριγώνου.....	51
8. Εμβαδόν τραπεζίου.....	53
9. Κανονικά πολύγωνα.....	55
10. Κανονικά πολύγωνα – Ομοιότητα.....	57
11. Μήκος τόξου και κύκλου.....	59
12. Εμβαδόν τόξου και κύκλου.....	61

### ***B' Τάξη Λυκείου – Τεχνολογική κατεύθυνση***

1. Διανύσματα.....	63
2. Συντεταγμένες στο επίπεδο.....	67
3. Βαρύκεντρο σχημάτων.....	69
4. Βαρύκεντρο σύνθετων σχημάτων.....	71
5. Παραβολή.....	73
6. Έλλειψη.....	75
7. Υπερβολή.....	77

### ***Παράρτημα***

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ – ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ.....	79
---	----

## Πρόλογος

Αγαπητέ μαθητή,

Το βιβλίο που κρατάς στα χέρια σου περιέχει δραστηριότητες για την κατανόηση βασικών γεωμετρικών εννοιών μέσα στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri – geometry II. Με την πραγματοποίηση αυτών των δραστηριοτήτων θα σου δοθεί η ευκαιρία να μάθεις γεωμετρικές έννοιες μέσα από δημιουργικό πειραματισμό και να αναπτύξεις την κριτική σου σκέψη κατασκευάζοντας τη γνώση σου. Το κριτήριο με το οποίο έχουν κατασκευαστεί οι δραστηριότητες είναι να σου δίνεται η ευκαιρία να κατασκευάσεις τη γνώση σου μέσα από τον προβληματισμό και τη διατύπωση προτάσεων για το τι εσύ θεωρείς πιθανό να συμβαίνει σε κάθε περίπτωση. Το εκπαιδευτικό λογισμικό Cabri – geometry II αποτελεί ιδανικό περιβάλλον για την κατασκευή γεωμετρικών εννοιών μέσα από πειραματισμό. Σε αυτό το περιβάλλον, και με τις προτεινόμενες δραστηριότητες, η γνώση που θα κατασκευάσεις θα είναι στερεή, διότι δε σου παρέχεται έτοιμη ούτε καλείσαι να την αποστηθίσεις. Επιπλέον, τις δραστηριότητες αυτές θα τις διεξάγεις δουλεύοντας ομαδικά με άλλους συμμαθητές σου στο εργαστήριο υπολογιστών του σχολείου σου. Η χρήση των ηλεκτρονικών υπολογιστών για σένα, ενδεχομένως, δεν είναι κάτι ξένο και το πιο πιθανό είναι ότι έχεις προηγούμενη εμπειρία, η οποία και σε ευχαριστεί πολύ. Ως εκ τούτου, η εκμάθηση του μαθησιακού αυτού περιβάλλοντος αναμένεται ότι θα αποδειχθεί για σένα εύκολη και γρήγορη.

Η πραγματοποίηση των δραστηριοτήτων που περιλαμβάνονται σε αυτό το βιβλίο μέσα στο περιβάλλον του εκπαιδευτικού λογισμικού Cabri – geometry II θα σου δώσει ενθουσιασμό ώστε δυναμικά και δημιουργικά να προχωρήσεις, σε συνεργασία με τους συμμαθητές σου και με τη βοήθεια του καθηγητή σου, στην οικοδόμηση βασικών γεωμετρικών εννοιών. Στο περιβάλλον αυτό σου δίνεται, επίσης, η ευκαιρία να αντιμετωπίσεις τη μάθηση της γεωμετρίας ως μια επιτυχημένη

για σένα δραστηριότητα και όχι ως κάτι δύσκολο, μονότονο, απλησίαστο και χωρίς ενδιαφέρον. Ελπίζω ότι θα μπορέσεις να εκμεταλλευτείς τις ευκαιρίες που σου παρέχει η ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων που ακολουθούν, ώστε να ανοίξεις νέους δρόμους στη μάθησή σου.

Φιλικά

Μαρία Κορδάκη

**Εκπαιδευτικές δραστηριότητες  
για την Α' και Β' Λυκείου**





## Α' Τάξη Λυκείου

### Κεφάλαιο 1

Α' τάξη – Γωνίες και κάθετες ευθείες

1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα 1α

Θεωρούμε έναν κύκλο κέντρου  $K$  και διαμέτρου  $AB$ . Φέρουμε την ακτίνα  $KΓ$  κάθετη στην  $AB$  και την ακτίνα  $KΔ$ , όπου  $Δ$  σημείο του κύκλου. Αν οι διχοτόμοι των γωνιών  $BΚΔ$  και  $ΓΚΔ$  τέμνουν τον κύκλο στα σημεία  $M$  και  $N$ , τι συμβαίνει με το μέγεθος της γωνίας  $MKN$ ;

#### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ γωνιών και κάθετων ευθειών.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $K$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  πάνω στον κύκλο με κέντρο  $K$ .
- Κατασκευάστε το συμμετρικό του σημείου  $A$  ως προς το κέντρο  $K$  και ονομάστε το  $B$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε την κάθετη  $ε$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ , στο σημείο  $K$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής της  $ε$  με τον κύκλο  $(K, KA)$  και ονομάστε το  $Γ$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $KΓ$ .
- Αποκρύψτε την ευθεία  $ε$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $Δ$  πάνω στον κύκλο  $(K, KA)$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $KΔ$ .
- Κατασκευάστε τις διχοτόμους  $δ_1$  και  $δ_2$  των γωνιών  $BΚΔ$  και  $ΓΚΔ$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των  $δ_1$  και  $δ_2$  με τον κύκλο  $(K, KA)$  και ονομάστε τα  $M$  και  $N$  αντίστοιχα.
- Επιλέξτε και μετρήστε τη γωνία  $MKN$ .

#### Διερεύνηση

Μετακινήστε το σημείο  $Δ$  στην περιφέρεια του κύκλου  $(K, KA)$ . Τι παρατηρείτε;

#### Απάντηση

.....

.....

### Δραστηριότητα 1β

Στην περιφέρεια κύκλου με κέντρο  $K$  παίρνουμε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  και σχηματίζουμε τις επίκεντρες γωνίες  $AKB, B\Gamma K, \Gamma K\Delta$  και  $\Delta KA$ . Αν  $KE, KZ, KH$  και  $K\Theta$  είναι οι διχοτόμοι των γωνιών αυτών, τι συμβαίνει άραγε με το άθροισμα των γωνιών  $EKZ + HK\Theta$ ;

### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ γωνιών.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $K$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  πάνω στον κύκλο κέντρου  $K$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AK, BK, \Gamma K$  και  $\Delta K$ .
- Επιλέξτε τις γωνίες  $AKB, B\Gamma K, \Gamma K\Delta$  και  $\Delta KA$ .
- Κατασκευάστε τις διχοτόμους  $\delta_1, \delta_2, \delta_3$  και  $\delta_4$  των γωνιών  $AKB, B\Gamma K, \Gamma K\Delta$  και  $\Delta KA$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των διχοτόμων αυτών με τον κύκλο  $K$ , και ονομάστε τα  $E, Z, H, \Theta$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $KE, KZ, KH$  και  $K\Theta$  αντίστοιχα.
- Επιλέξτε τις γωνίες  $EKZ$  και  $HK\Theta$ , και ονομάστε τις  $K_1$  και  $K_2$ , αντίστοιχα. Στη συνέχεια, μετρήστε και πινακοποιήστε τις αυτόματα.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα το άθροισμα των γωνιών  $K_1 + K_2$ .

### Διερεύνηση

Μετακινήστε τα σημεία  $A, B, \Gamma$  και  $\Delta$  στην περιφέρεια του κύκλου  $K$  και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

### Απάντηση

**Α' τάξη – Συμμετρία ως προς σημείο και ως προς άξονα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Να κατασκευάσετε το συμμετρικό ως προς σημείο  $O$ , το οποίο να ονομάσετε  $A'B'\Gamma'$ . Στη συνέχεια να κατασκευάσετε τα συμμετρικά των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$  ως προς έναν άξονα συμμετρίας  $\varepsilon$ , τα οποία να ονομάσετε  $A''B''\Gamma''$  και  $\Delta E Z$  αντίστοιχα. Ποιες άραγε σχέσεις συνδέουν όλα αυτά τα σχήματα;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της σχέσης ενός σχήματος και του συμμετρικού του ύστερα από αλληλουχία συμμετριών ως προς σημείο και ως προς άξονα συμμετρίας.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε το συμμετρικό σχήμα του  $AB\Gamma$  ως προς το σημείο  $O$ , και ονομάστε το  $A' B' \Gamma'$ . Στη συνέχεια κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις πλευρές των δύο τριγώνων.

**Διερεύνηση**

A) Να μετακινήσετε το σημείο  $O$  στην οθόνη του υπολογιστή έτσι ώστε να βρίσκεται στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή να συμπέσει με μία κορυφή του. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

B) Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

Γ) Να κατασκευάσετε ευθεία  $\varepsilon$  και να πάρετε το συμμετρικό (επιλογή Ανάκλαση) του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς άξονα συμμετρίας  $\varepsilon$ , το οποίο να ονομάσετε  $A''B''\Gamma''$ . Να κατασκευάσετε, να μετρήσετε και να πινακοποιήσετε αυτόματα τις πλευρές του. Να μετακινήσετε τον άξονα συμμετρίας  $\varepsilon$  ή/και τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και να πινακοποιήσετε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

Δ) Να κατασκευάσετε το συμμετρικό του  $A'B'\Gamma'$  ως προς άξονα συμμετρίας  $\varepsilon$ , το οποίο να ονομάσετε  $\Delta EZ$ . Να κατασκευάσετε και να μετρήσετε αυτόματα τις πλευρές του. Να μετακινήσετε τον άξονα συμμετρίας  $\varepsilon$  ή/και τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή. Τι συμπεραίνετε;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

**Α' τάξη – Κριτήρια ισότητας τριγώνων****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Στις πλευρές μιας  $O\chi$  και  $O\psi$  μιας γωνίας  $\chi O\psi$  παίρνουμε τα σημεία  $A$  και  $B$  έτσι ώστε  $OA=OB$ . Ποια σχέση άραγε συνδέει τα ευθύγραμμα τμήματα  $AM$  και  $BM$ , όπου  $M$  είναι ένα τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας  $\chi O\psi$ ; Αν οι ευθείες  $AM$  και  $BM$  τέμνουν τις  $O\chi$  και  $O\psi$  στα σημεία  $\Gamma$  και  $\Delta$  αντίστοιχα, ποιες άραγε σχέσεις συνδέουν τα ευθύγραμμα τμήματα **α)**  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ , **β)**  $M\Gamma$  και  $M\Delta$  **γ)**  $B\Gamma$  και  $A\Delta$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων ισότητας στα τρίγωνα.

**Κατασκευή Α**

- Κατασκευάστε δύο ημιευθείες που να διέρχονται ένα κοινό σημείο  $O$ . Στη συνέχεια, ονομάστε τις  $O\chi$  και  $O\psi$ .
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα της επιλογής σας.
- Στη συνέχεια, κατασκευάστε τα σημεία τομής του κύκλου  $O$  με τις ημιευθείες  $O\chi$  και  $O\psi$  και ονομάστε τα  $A$  και  $B$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA$  και  $OB$  και αποκρύψτε τον κύκλο  $O$ .
- Επιλέξτε τη γωνία  $AOB$ , κατασκευάστε τη διχοτόμο της  $\delta$  και, στη συνέχεια, ορίστε ένα σημείο  $M$  πάνω σε αυτήν.
- Τέλος, κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $MA$  και  $MB$ , μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα.

**Διερεύνηση**

- 1) Μετακινήστε το σημείο  $M$  πάνω στη διχοτόμο  $\delta$ , όπως και τις πλευρές της γωνίας  $AOB$  και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

- 2) Μπορείτε να αιτιολογήσετε την ισότητα των ευθύγραμμων τμημάτων  $MA$  και  $MB$ ;

**Αιτιολόγηση**

.....

### Κατασκευή Β

- Κατασκευάστε τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , έτσι ώστε να διέρχονται τα σημεία ΑΜ και ΒΜ αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  με την ημιευθεία Οψ και Οχ, και ονομάστε τα Γ και Δ αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη ΑΓ, ΒΔ, ΜΓ, ΜΔ, ΒΓ και ΑΔ.

### Διερεύνηση

- 1) Μετακινήστε το σημείο Μ πάνω στη διχοτόμο δ, όπως και τις πλευρές της γωνίας ΑΟΒ και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

### Απάντηση

- 2) Μπορείτε να αιτιολογήσετε την ισότητα των ευθύγραμμων τμημάτων i) ΑΓ και ΒΔ, ii) ΜΓ και ΜΔ, iii) ΒΓ και ΑΔ;

#### i) Αιτιολόγηση

#### ii) Αιτιολόγηση

#### iii) Αιτιολόγηση

### Κεφάλαιο 3

Α' τάξη – Γωνίες με πλευρές κάθετες ή παράλληλες

1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα 1α – Γωνίες με πλευρές κάθετες

Ποιες σχέσεις άραγε συνδέουν δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες;

#### Στόχος

Η διερεύνηση των σχέσεων ισότητας σε γωνίες με πλευρές κάθετες.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O_1$  και δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι οποίες να διέρχονται το  $O_1$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O_2$  και δύο ευθείες  $\varepsilon_1'$  και  $\varepsilon_2'$  έτσι ώστε να είναι κάθετες από το σημείο  $O_1$  στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_1'$ , όπως και των  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_2'$ , και ονομάστε τα Α και Β αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα σημεία Γ, Δ και Γ'Δ' πάνω στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_1'$ , όπως και στις ευθείες  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_2'$  αντίστοιχα.
- Επιλέξτε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις γωνίες  $O_1 = \angle GO_1\Delta$  και  $O_2 = \angle G'O_2\Delta'$  αντίστοιχα.

#### Διερεύνηση

Να μετακινήσετε τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στην οθόνη του υπολογιστή και να πινακοποιήσετε αυτόματα τις τιμές των μεγεθών που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

#### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....



1. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_1$  και  $O_2$ ;

**Απάντηση**

**Αιτιολόγηση**

2. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_1$  και  $O_2$  α) όταν και οι δύο είναι οξείες, β) όταν η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία;

**Απάντηση**

**Αιτιολόγηση**

**Δραστηριότητα 1β – Γωνίες με πλευρές παράλληλες**

Ποιες σχέσεις άραγε συνδέουν δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες;

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων ισότητας σε γωνίες με πλευρές παράλληλες.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O_1$  και δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  οι οποίες να διέρχονται το  $O_1$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O_2$  και δύο ευθείες  $\varepsilon_1'$  και  $\varepsilon_2'$ , έτσι ώστε να διέρχονται το  $O_2$  και να είναι παράλληλες στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_1'$ , το οποίο να ονομάσετε  $O_3$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$  και  $\Gamma'\Delta'$  πάνω στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_1'$ , όπως και στις  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_2'$  αντίστοιχα.
- Επιλέξτε, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τις γωνίες  $O_1=\Gamma O_1\Delta$  και  $O_2=\Gamma' O_2\Delta'$  και  $O_3=\Gamma' O_3\Delta$ , αντίστοιχα.

**Διερεύνηση**

Να μετακινήσετε τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  στην οθόνη του υπολογιστή και να πινακοποιήσετε αυτόματα τις τιμές των μεγεθών που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....

**3. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_1$  και  $O_2$ ;**

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

4. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_1$  και  $O_2$  α) όταν και οι δύο είναι οξείες, β) όταν είναι αμβλείες;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

5. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_1$  και  $O_3$ ;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

6. Ποια είναι η σχέση των γωνιών  $O_2$  και  $O_3$ ;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....



**Α' τάξη – Παραλληλόγραμμα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα 1α**

Να διερευνήσετε **α)** αν υπάρχει παραλληλόγραμμα το οποίο συγχρόνως είναι ορθογώνιο και ρόμβος, **β)** αν ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος, **γ)** αν ένας ρόμβος είναι πάντα τετράγωνο, **δ)** ποιο παραλληλόγραμμα έχει τις διαγώνιες του ίσες, **ε)** σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα, **στ)** σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι είναι συγχρόνως άξονες συμμετρίας, **ζ)** σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι είναι συγχρόνως και διχοτόμοι των γωνιών του και **η)** υπάρχει ρόμβος με όλες του τις γωνίες ίσες.

**Στόχος**

Η διερεύνηση βασικών ιδιοτήτων των παραλληλόγραμμων.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΔ και ΟΓ και μετρήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_1$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Από σημείο εκτός της  $\varepsilon_1$  κατασκευάστε **α)** την ευθεία  $\varepsilon_2$  παράλληλη προς την  $\varepsilon_1$ , **β)** την ευθεία  $\varepsilon_3$ , που να τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο Δ πάνω στην  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε από το σημείο Δ, μία ευθεία  $\varepsilon_4$  παράλληλη στην  $\varepsilon_3$ , που να τέμνει τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία τομής των  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ , από τις  $\varepsilon_3$  και  $\varepsilon_4$ , και ονομάστε τα Α, Β, Δ και Γ αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΑΓ, και ΒΔ, και μετρήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε τις γωνίες του παραλληλόγραμμου Α και Β, και μετρήστε τις αυτόματα.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ΒΔ και ΑΓ, και ονομάστε το Ο.
- Μετρήστε τη γωνία ΑΟΔ=Ο.
- Επιλέξτε και μετρήστε τις γωνίες ΔΑΟ=Α<sub>1</sub> και ΟΒΓ=Β<sub>1</sub>.

**Διερεύνηση**

Να μετακινήσετε την ευθεία  $\varepsilon_3$  από το σημείο Δ ή την ευθεία  $\varepsilon_1$  και να διερευνήσετε τι συμβαίνει στις παρακάτω περιπτώσεις:

**Α)** Υπάρχει παραλληλόγραμμα το οποίο είναι συγχρόνως ορθογώνιο και ρόμβος;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

---

**Β)** Ένα τετράγωνο είναι και ρόμβος;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

---

**Γ)** Ένας ρόμβος είναι πάντα τετράγωνο;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

---

**Δ)** Ποιο παραλληλόγραμμο έχει τις διαγώνιους του ίσες;

**Απάντηση**

---

---

---

---

---

---

---

**Ε)** Σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι τέμνονται κάθετα;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**ΣΤ)** Σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι είναι επίσης άξονες συμμετρίας;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**Ζ)** Σε ποιο παραλληλόγραμμα οι διαγώνιοι είναι και διχοτόμοι των γωνιών του;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**Η)** Υπάρχει ρόμβος με όλες τις γωνίες του ίσες;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....



### Δραστηριότητα 1β

Έστω ένα κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα των πλευρών του  $E, Z, H$  και  $\Theta$ . Τι είδους σχήμα είναι άραγε το τετράπλευρο  $EZH\Theta$ ; Ποια σχέση μπορεί να υπάρχει ανάμεσα στα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $EZ, ZH, H\Theta$  και  $\Theta E$  και στα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ ;

### Στόχος

Η διερεύνηση βασικών ιδιοτήτων των παραλληλόγραμμων.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε τις διαγώνιους  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε τα μέσα των πλευρών  $E, Z, H$  και  $\Theta$  του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$ .
- Μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$ , και μετρήστε τα.
- Επιλέξτε και μετρήστε τις γωνίες  $\angle BEZ = \angle E_1$ ,  $\angle B\Gamma A = \angle A_1$ ,  $\angle A\Theta E = \angle \Theta_1$  και  $\angle A\Delta B = \angle \Delta_1$ .

### Διερεύνηση

Μετακινήστε τις κορυφές του τετράπλευρου  $AB\Gamma\Delta$  στην οθόνη του υπολογιστή και προσπαθήστε να απαντήσετε στις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Τι είδους σχήματος είναι το τετράπλευρο  $EZH\Theta$ ;

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

- 2) Ποια είναι η σχέση ανάμεσα στα μήκη των ευθύγραμμων τμημάτων  $EZ, ZH, H\Theta, \Theta E$  και στα ευθύγραμμα τμήματα  $A\Gamma$  και  $B\Delta$ ;

### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

---

### Αιτιολόγηση

---

---

---

---



**Α' τάξη – Εγγεγραμμένα τετράπλευρα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$  και ένα τυχαίο σημείο  $E$  πάνω στην περιφέρεια αυτού του κύκλου. Έστω  $\Delta$ ,  $K$  και  $Z$  οι προβολές του  $E$  στις πλευρές του τριγώνου  $AB\Gamma$ . Υπάρχει άραγε κάποια σχέση θέσης των σημείων αυτών;

**Στόχος**

Η διερεύνηση βασικών ιδιοτήτων των εγγεγραμμένων τετραπλεύρων. Η ευθεία του Simson.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $O$ .
- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τις πλευρές του  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$ , και χρωματίστε τις μοβ.
- Κατασκευάστε δύο ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έτσι ώστε να διέρχονται τα σημεία  $B$ ,  $\Gamma$  και  $A$ ,  $\Gamma$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε ένα τυχαίο σημείο  $E$  πάνω στον κύκλο με κέντρο  $O$ .
- Κατασκευάστε τις κάθετες ευθείες από το  $E$  στις  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $AB$ , και ονομάστε τις  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  και  $\zeta_3$ , αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε το σημείο τομής της ευθείας  $\zeta_1$  με την ευθεία  $\varepsilon_1$ , και ονομάστε το  $\Delta$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $E\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής της ευθείας  $\zeta_2$  με την ευθεία  $\varepsilon_2$ , και ονομάστε το  $Z$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $EZ$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής της ευθείας  $\zeta_3$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και ονομάστε το  $K$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $EK$ . Χρωματίστε κόκκινα τα ευθύγραμμο τμήματα  $E\Delta$ ,  $EZ$  και  $EK$ . Αποκρύψτε τις ευθείες  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  και  $\zeta_3$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμο τμήματα  $\Delta K$  και  $KZ$ .
- Κατασκευάστε τη γωνία  $\Delta KZ$ , ονομάστε την  $K_2$  και μετρήστε την αυτόματα.

**Διερεύνηση**

Να μετακινήσετε το σημείο  $E$  στην περιφέρεια του κύκλου κέντρου  $O$  ή/και τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$ .

1. Τι υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε για τη θέση των σημείων  $\Delta$ ,  $K$  και  $Z$ ;

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

2. Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....

Εάν όχι, επιλέξτε και μετρήστε τις γωνίες  $\angle AZE = \angle Z$ ,  $\angle EKA = \angle K$ ,  $\angle E\Delta B = \angle \Delta$ . Στη συνέχεια, με βάση τις μετρήσεις σας, μελετήστε τα τετράπλευρα  $EKZA$  και  $EKB\Delta$ . Ποιο είναι το είδος των τετραπλεύρων αυτών;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Α' τάξη – Γεωμετρικοί τόποι****3 Δραστηριότητες****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα 1**

Ποιος είναι άραγε ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta E$  του οποίου τα άκρα βρίσκονται πάνω στις ίσες πλευρές  $AB$  και  $AG$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  έτσι ώστε να ισχύει η σχέση  $\Delta\Delta = \Gamma E$ .

**Στόχος**

Να διατυπωθεί υπόθεση για το γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $\Delta E$  του οποίου τα άκρα  $\Delta$  και  $E$  βρίσκονται στις ίσες πλευρές  $AB$  και  $AG$  ενός ισοσκελούς τριγώνου  $AB\Gamma$  και πληρούν τη συνθήκη  $\Delta\Delta = \Gamma E$ .

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  και τη μεσοκάθετό του  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  πάνω στην  $\varepsilon$  και τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $AG$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $\Delta$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το διαβήτη, κατασκευάστε ένα τμήμα  $\Gamma E$  ίσο με το  $\Delta\Delta$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta E$  και το μέσον του  $M$ .
- Ενεργοποιήστε την επιλογή **Εμφάνιση ίχνους** για το σημείο  $M$ .
- Μετακινήστε το σημείο  $\Delta$  κατά μήκος της πλευράς  $AB$ .

**Διερεύνηση**

*Τι υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε για το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$ ;*

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

*Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;*

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

**Δραστηριότητα 2**

Ποιος είναι άραγε ο γεωμετρικός τόπος του συμμετρικού ενός σημείου  $M$  ως προς



τις διάφορες θέσεις μιας ευθείας  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται ένα σταθερό σημείο  $A$  του επιπέδου; Με βάση αυτή την εμπειρία, να διατυπώσετε υπόθεση για το γεωμετρικό τόπο του συμμετρικού ενός τριγώνου  $AB\Gamma$  για τις διάφορες θέσεις μιας ευθείας  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται ένα σταθερό σημείο  $M$  του επιπέδου.

### Στόχος

Να διατυπωθεί υπόθεση για το γεωμετρικό τόπο του συμμετρικού ενός σημείου  $M$  ως προς ευθεία  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται ένα σημείο  $A$  για τις διάφορες δυνατές θέσεις της ευθείας  $\varepsilon$ .

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε δύο σημεία  $M$  και  $A$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Στη συνέχεια, κατασκευάστε μια ευθεία  $\varepsilon$  που να διέρχεται το σημείο  $A$ .
- Κατασκευάστε το συμμετρικό του σημείου  $M$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$ .
- Ενεργοποιήστε την επιλογή **Εμφάνιση ίχνους** για το σημείο  $M$ .
- Περιστρέψτε την ευθεία  $\varepsilon$  γύρω από το  $M$ .

### Διερεύνηση

A) Τι υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε για το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$ ;

### Διατύπωση υπόθεσης

---



---

Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

### Αιτιολόγηση

---



---



---



---

B) Με βάση την αποκτηθείσα εμπειρία, κατασκευάστε τρίγωνο  $AB\Gamma$  και το συμμετρικό του ως προς ευθεία  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται σημείο  $M$ . Να διατυπώσετε υπόθεση για το γεωμετρικό τόπο του συμμετρικού του τριγώνου  $AB\Gamma$  ως προς την ευθεία  $\varepsilon$  όταν αυτή περιστρέφεται γύρω από το σημείο  $M$ .

### Διατύπωση υπόθεσης

---



---

Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

---



---

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....

**Δραστηριότητα 3**

Ποιος είναι άραγε ο γεωμετρικός τόπος του μέσου  $M$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  του οποίου το άκρο  $A$  παραμένει σταθερό, ενώ το άκρο  $B$  διαγράφει περιφέρεια κύκλου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ ;

**Στόχος**

Η διατύπωση υπόθεσης για το γεωμετρικό τόπο του μέσου  $M$  ενός ευθύγραμμου τμήματος  $AB$  του οποίου το άκρο  $A$  παραμένει σταθερό, ενώ το άκρο  $B$  διαγράφει περιφέρεια κύκλου κέντρου  $O$  και ακτίνας  $R$ .

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $O$  και ακτίνα της επιλογής σας.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  εκτός του κύκλου με κέντρο  $O$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $B$  πάνω στον κύκλο με κέντρο  $O$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το μέσον  $M$  του ευθύγραμμου τμήματος  $AB$ .

**Διερεύνηση**

Να επιλέξετε *Εμφάνιση ίχνους* του σημείου  $M$  και να περιστρέψετε το σημείο  $B$  πάνω στον κύκλο κέντρου  $O$ . Ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε για το γεωμετρικό τόπο του σημείου  $M$ ;

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....





**Α' τάξη – Θεώρημα του Θαλή****2 Δραστηριότητες****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα 1**

Έστω τυχαίο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $M$  το μέσον της πλευράς  $B\Gamma$ . Έστω μια τυχαία ευθεία  $\varepsilon$  η οποία διέρχεται το  $M$  και τέμνει τις πλευρές  $AB$  και  $A\Gamma$  του τριγώνου στα σημεία  $E$  και  $Z$  αντίστοιχα. Υπάρχουν άραγε κάποιες σχέσεις μεταξύ των ευθύγραμμων τμημάτων  $AE$ ,  $AZ$ ,  $BE$  και  $\Gamma Z$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση της ύπαρξης αναλογικών σχέσεων μεταξύ των τμημάτων στα οποία τέμνει τις δύο πλευρές ενός τριγώνου μια ευθεία που διέρχεται το μέσον της τρίτης πλευράς.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τις ευθείες  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  και  $\zeta_3$  που να διέρχονται τα σημεία  $A$  και  $B$ ,  $A$  και  $\Gamma$ ,  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε το μέσον  $M$  του ευθύγραμμου τμήματος  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ευθεία  $\varepsilon$  που διέρχεται το σημείο  $M$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $E$  και  $Z$ , έτσι ώστε να αποτελούν τις τομές της ευθείας  $\varepsilon$  με τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BE$ ,  $AE$ ,  $AZ$  και  $\Gamma Z$ , και μετρήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε τους λόγους  $AE/AZ$  και  $BE/\Gamma Z$  και πινακοποιήστε τους αυτόματα.

**Διερεύνηση**

A) Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή την ευθεία  $\varepsilon$  στην οθόνη του υπολογιστή και να πινακοποιήσετε αυτόματα τους λόγους που προαναφέρθηκαν. Τι παρατηρείτε;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

### Αιτιολόγηση

---

---

---

---

Σε περίπτωση που δεν είστε ακόμα σε θέση να αιτιολογήσετε την απάντησή σας, προχωρήστε στην ακόλουθη δραστηριότητα:

### Δραστηριότητα 2

#### Κατασκευή

- Από την κορυφή Α του τριγώνου ΑΒΓ κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_1$  παράλληλη προς την ευθεία  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής της  $\varepsilon_1$  με την ευθεία  $\zeta_3$ , και ονομάστε το Κ.
- Κατασκευάστε και μετρήστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΒΜ και ΜΚ.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους ΑΕ/ΒΕ, ΜΚ/ΜΒ, ΑΖ/ΓΖ, ΑΕ/ΑΖ και ΒΕ/ΓΖ.
- Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ ή την ευθεία  $\varepsilon$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους που προαναφέρθηκαν.

Μπορείτε τώρα να διατυπώσετε μια υπόθεση για τις σχέσεις των λόγων των ευθύγραμμων τμημάτων που υπολογίστηκαν και έπειτα να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;

#### Διατύπωση υπόθεσης

---

---

#### Αιτιολόγηση

---

---

---

---

#### Δραστηριότητα 1 – Ομοιότητα

Έστω Ο σημείο του επιπέδου και οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  που το διέρχονται. Παίρνουμε τα σημεία Α, Β και Γ στις ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  αντίστοιχα και σχηματίζουμε το τρίγωνο ΑΒΓ. Από τυχαίο σημείο Α' της ευθείας  $\varepsilon_1$  φέρνουμε τρεις ευθείες  $\zeta_1$ ,  $\zeta_2$  και  $\zeta_3$ , παράλληλες προς τις πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ, οι οποίες τέμνουν τις ευθείες  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  στα σημεία Β' και Γ' αντίστοιχα. Υπάρχουν άραγε κάποιες σχέσεις

μεταξύ των πλευρών των τριγώνων  $AB\Gamma$  και  $A'B'\Gamma'$ ; Επιπλέον, υπάρχουν σχέσεις μεταξύ των τμημάτων  $OA$ ,  $OA'$ ,  $OB$ ,  $OB'$ ,  $OG$  και  $OG'$ ;

### Στόχος

Η διερεύνηση της ύπαρξης αναλογικών σχέσεων μεταξύ όμοιων σχημάτων.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα σημείο  $O$  και τρεις ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  που να το διέρχονται.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $B$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $\Gamma$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_3$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$ , και μετρήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A'$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon_1$ .
- Από το σημείο  $A'$  κατασκευάστε μία ευθεία  $\zeta_1$  παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\zeta_1$  και  $\varepsilon_2$ , και ονομάστε το  $B'$ .
- Κατασκευάστε από το σημείο  $B'$  μία ευθεία  $\zeta_2$  παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το σημείο τομής των ευθειών  $\zeta_2$  και  $\varepsilon_3$ , και ονομάστε το  $\Gamma'$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $A'B'$ ,  $B'\Gamma'$  και  $A'\Gamma'$  και μετρήστε τα αυτόματα. Κατόπιν, αποκρύψτε τις ευθείες  $\zeta_1$  και  $\zeta_2$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $OA$ ,  $OB$ ,  $OG$  και τα  $O'A'$ ,  $O'B'$ ,  $O'\Gamma'$  και μετρήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους  $O'A'/OA$ ,  $O'B'/OB$  και  $O'\Gamma'/OG$ , όπως και τους  $A'B'/AB$ ,  $A'\Gamma'/A\Gamma$  και  $B'\Gamma'/B\Gamma$ .
- Μετακινήστε τις ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_3$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Να διερευνήσετε τις αναλογικές σχέσεις μεταξύ των πλευρών των σχημάτων στην κατασκευή που περιγράφηκε και να διατυπώσετε υποθέσεις για το είδος των σχημάτων.

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**Διατύπωση υποθέσεων**

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**B' Τάξη Λυκείου - Μαθήματα Γενικής παιδείας****Κεφάλαιο 1****B' τάξη – Το πυθαγόρειο θεώρημα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 30 λεπτά****Δραστηριότητα**

Αν οι διαγώνιοι ενός τετράπλευρου είναι κάθετες, ποια σχέση άραγε συνδέει τα τετράγωνα των πλευρών του;

**Στόχος**

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ πλευρών τετράπλευρου με τη χρήση του πυθαγόρειου θεωρήματος.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε δύο κάθετες ευθείες και ονομάστε τις  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε το σημείο O της τομής των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία A και Γ πάνω στην  $\varepsilon_1$  και εκατέρωθεν του σημείου O.
- Κατασκευάστε τα σημεία B και Δ πάνω στην  $\varepsilon_2$  και εκατέρωθεν του σημείου O.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα OA, OB, OG και OD, όπως και τα AD, AB, GB και ΓΔ, και μετρήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε τα μεγέθη  $(OA)^2$ ,  $(OB)^2$ ,  $(OG)^2$ ,  $(OD)^2$  και τα  $(OA)^2 + (OB)^2$ ,  $(OG)^2 + (OD)^2$ ,  $(OA)^2 + (OD)^2$  και  $(OB)^2 + (OG)^2$ .
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη  $(AB)^2$ ,  $(BG)^2$ ,  $(AD)^2$ ,  $(DG)^2$ ,  $(AB)^2 + (DG)^2$  και  $(AB)^2 + (BG)^2$ .
- Μετακινήστε τα σημεία A, Γ και B, Δ στις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα μεγέθη που υπολογίστηκαν, ποιες υποθέσεις μπορείτε να διατυπώσετε; Ποιες είναι οι βασικές ιδιότητες που δημιουργούνται; Διατυπώστε την αιτιολόγηση για την ύπαρξη αυτών των ισοτήτων.

**Ισότητα 1**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

**Ισότητα 2**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

**Ισότητα 3**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

**Ισότητα 4**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

**Ισότητα 5**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

## Κεφάλαιο 1

**Β' τάξη – Γενίκευση πυθαγόρειου θεωρήματος**

**1 Δραστηριότητα**

**Χρόνος: 30 λεπτά**

### Δραστηριότητα

Αν  $\Delta$  είναι τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$ , να διερευνηθεί η αλήθεια της σχέσης  $(AB)^2 \cdot \Gamma\Delta + (A\Gamma)^2 \cdot B\Delta = (A\Delta)^2 \cdot B\Gamma + B\Gamma \cdot B\Delta \cdot \Delta\Gamma$  για τις διάφορες τιμές του  $\Delta$ .

### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ πλευρών τριγώνου με τη χρήση του γενικευμένου πυθαγόρειου θεωρήματος. Το θεώρημα Stewart.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο στην πλευρά  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$ ,  $A\Delta$ ,  $B\Delta$ ,  $\Delta\Gamma$ , και μετρήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε τις παραστάσεις  $(AB)^2 \cdot \Gamma\Delta + (A\Gamma)^2 \cdot B\Delta$  και  $(A\Delta)^2 \cdot B\Gamma + B\Gamma \cdot B\Delta \cdot \Delta\Gamma$ .
- Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή ή το σημείο  $\Delta$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  και διερευνήστε τι συμβαίνει, ώστε να διατυπώσετε υπόθεση για την ισότητα των παραστάσεων που παρατηρείτε.

### Διατύπωση υπόθεσης

*Μπορείτε να αιτιολογήσετε την απάντησή σας;*

### Αιτιολόγηση





## Β' τάξη – Στη διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και  $AD$  και  $AE$  οι διχοτόμοι της εσωτερικής και της εξωτερικής γωνίας  $A$ . Να διερευνηθεί η σχέση των λόγων των τμημάτων στα οποία οι  $AD$  και  $AE$  χωρίζουν εσωτερικά και εξωτερικά την απέναντι πλευρά  $B\Gamma$  με το λόγο των πλευρών που περιέχουν τη γωνία  $A$ .

#### Στόχος

Η διερεύνηση της ύπαρξης αναλογικών σχέσεων μεταξύ των τμημάτων στα οποία τέμνεται μια πλευρά ενός τριγώνου από την εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της απέναντι γωνίας του τριγώνου προς αυτή την πλευρά.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $AG$ , μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Κατασκευάστε τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$  έτσι ώστε να διέρχονται τα σημεία  $A$ ,  $\Gamma$  και  $B$ ,  $\Gamma$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τις διχοτόμους  $\delta_1$  και  $\delta_2$  της γωνίας  $BAG$  και της εξωτερικής της.
- Κατασκευάστε τα σημεία  $D$  και  $E$  ως σημεία τομής των διχοτόμων  $\delta_1$  και  $\delta_2$  με την ευθεία  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $BD$ ,  $D\Gamma$ ,  $EB$  και  $E\Gamma$ , και μετρήστε τα.
- Υπολογίστε τους λόγους  $AB/AG$ ,  $BD/D\Gamma$  και  $EB/E\Gamma$  και πινακοποιήστε τους αυτόματα.
- Μετακινήστε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή την ευθεία  $\varepsilon$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τους λόγους που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Να διατυπώσετε υπόθεση για τις σχέσεις μεταξύ των λόγων των ευθύγραμμων τμημάτων που υπολογίστηκαν για τις διάφορες μορφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  και μετά να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

#### Διατύπωση υπόθεσης

---



---

Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

**B' τάξη – Δύναμη σημείου ως προς κύκλο****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω δύο κύκλοι με κέντρα  $O_1$  και  $O_2$  οι οποίοι τέμνονται στα σημεία A και B. Να κατασκευάσετε την ευθεία AB και α) να διερευνήσετε εάν η δύναμη κάθε σημείου M της AB ως προς τον κύκλο κέντρου  $O_1$  ισούται με τη δύναμη του σημείου αυτού ως προς τον κύκλο με κέντρο  $O_2$ , β) να διερευνήσετε εάν υπάρχουν σημεία με ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους όταν αυτοί είναι εφαπτόμενοι και να προσδιορίσετε τη θέση τους και γ) να διερευνήσετε εάν υπάρχουν σημεία με ίσες δυνάμεις ως προς τους δύο κύκλους όταν αυτοί δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, και να προσδιορίσετε τη θέση τους.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των ιδιοτήτων του ριζικού άξονα δύο κύκλων.

**Περίπτωση 1η:** Οι κύκλοι τέμνονται.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε δύο κύκλους με κέντρα  $O_1$  και  $O_2$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $O_1O_2$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία A και B ως σημεία τομής των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$ .
- Κατασκευάστε την ευθεία ε που να διέρχεται τα σημεία A και B.
- Κατασκευάστε ένα σημείο M πάνω στην ευθεία ε.
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_1$  και  $E_1$  πάνω στον κύκλο  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_2$  και  $E_2$  ως σημεία τομής των ευθύγραμμων τμημάτων  $M\Delta_1$  και  $ME_1$  με τους κύκλους  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_2$ ,  $ME_2$ , MA και MB, μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα, όπως και τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ .
- Υπολογίστε τα γινόμενα  $M\Delta_2 \cdot M\Delta_1$ ,  $MA \cdot MB$  και  $ME_2 \cdot ME_1$  και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Μετακινήστε το M πάνω στην ευθεία ε ή μεταβάλετε τις ακτίνες των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των μεγεθών που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

- 1) Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, μπορείτε να διατυπώσετε κάποια υπόθεση. Πώς την αιτιολογείτε;

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

- 2) Ποια ιδιότητα φαίνεται ότι έχουν τα σημεία της ευθείας  $\varepsilon$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

**Περίπτωση 2η:** Οι κύκλοι εφάπτονται.

### Κατασκευή

- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $O_1$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  πάνω στον κύκλο κέντρου  $O_1$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $O_2$  και ακτίνα  $O_2A$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $O_1O_2$ .
- Κατασκευάστε την κάθετη ευθεία  $\varepsilon$  από το σημείο  $A$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $O_1O_2$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_1$  και  $E_1$  πάνω στους κύκλους  $O_1$  και  $O_2$ , αντίστοιχα.

- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_2$  και  $E_2$  ως σημεία τομής των ευθύγραμμων τμημάτων  $M\Delta_1$  και  $ME_1$  με τους κύκλους  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_2$ ,  $ME_2$  και  $MA$ , μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα, όπως και τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ .
- Υπολογίστε τα γινόμενα  $M\Delta_2 \cdot M\Delta_1$ ,  $MA^2$  και  $ME_2 \cdot ME_1$  και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Μετακινήστε το  $M$  πάνω στην ευθεία  $\varepsilon$  ή μεταβάλετε τις ακτίνες των κύκλων  $O_1$  και  $O_2$  και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές των μεγεθών που προαναφέρθηκαν.

1) Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, μπορείτε να διατυπώσετε μια υπόθεση; Πώς την αιτιολογείτε;

#### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

#### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

2) Ποια ιδιότητα φαίνεται ότι έχουν τα σημεία της ευθείας  $\varepsilon$ ; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

#### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

#### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

**Περίπτωση 3η:** Οι κύκλοι δεν έχουν κανένα κοινό σημείο.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε δύο μη τεμνόμενους κύκλους, με κέντρα  $O_1$  και  $O_2$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $O_1O_2$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_1$  και  $E_1$  πάνω στους κύκλους  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ .
- Κατασκευάστε τα σημεία  $\Delta_2$  και  $E_2$  ως σημεία τομής των ευθύγραμμων τμημάτων  $M\Delta_1$  και  $ME_1$  με τους κύκλους  $O_1$  και  $O_2$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $M\Delta_2$ ,  $ME_2$ ,  $M\Delta_1$  και  $ME_1$ , και μετρήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε τα γινόμενα  $M\Delta_2 \cdot M\Delta_1$  και  $ME_2 \cdot ME_1$ . Μετακινήστε το  $M$  πάνω στην οθόνη του υπολογιστή σας και διερευνήστε για ποιες θέσεις του  $M$  τα γινόμενα που προαναφέρθηκαν είναι ίσα.

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....

**Αιτιολόγηση**

.....

.....

.....

.....

## Κεφάλαιο 2

### B' τάξη – Εμβαδόν ορθογώνιου

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 20 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Έστω ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και ένα τυχαίο σημείο  $M$  πάνω στην πλευρά  $ΓΔ$ . Να κατασκευάσετε το τρίγωνο  $AMB$  και να διερευνήσετε τη σχέση του εμβαδού αυτού του τριγώνου ως προς το εμβαδόν του ορθογώνιου όταν το  $M$  μετακινείται στην πλευρά  $ΓΔ$  ή όταν το μέγεθος του ορθογώνιου  $ABΓΔ$  μεταβάλλεται.

#### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων μεταξύ ορθογώνιου και τριγώνου που έχει ως πλευρά τη μία πλευρά ορθογώνιου, ενώ η τρίτη του κορυφή μετακινείται στην απέναντι πλευρά του ορθογώνιου.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\epsilon_1$  κάθετη από το σημείο  $A$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $\Delta$  πάνω στην ευθεία  $\epsilon_1$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\epsilon_2$  κάθετη από το σημείο  $\Delta$  στην ευθεία  $\epsilon_1$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\epsilon_3$  κάθετη από το σημείο  $B$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Gamma$  της τομής των  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ .
- Κατασκευάστε το ορθογώνιο  $ABΓΔ$ . Στη συνέχεια, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το εμβαδόν του.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Gamma$ .
- Αποκρύψτε τις ευθείες  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  και  $\epsilon_3$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το τρίγωνο  $AMB$ . Στη συνέχεια, μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το εμβαδόν του.
- Μετακινήστε το σημείο  $M$  πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Gamma$  ή μεταβάλετε το ορθογώνιο  $ABΓΔ$  μετακινώντας τις κορυφές του  $A$ ,  $B$  ή  $\Delta$  στην οθόνη του υπολογιστή, και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Με βάση τον πίνακα που κατασκευάσατε, ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε; Αιτιολογήστε την.



Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

## Β' τάξη – Εμβαδόν παραλληλόγραμμου

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 25 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Έστω παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  και ένα σημείο  $M$  στο εσωτερικό του. Κατασκευάστε τα τρίγωνα  $ABM$ ,  $BΓM$ ,  $ΓΔM$  και  $ΔAM$ . Να διερευνήσετε αν ισχύει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών αυτών των τριγώνων και αν η σχέση αυτή ισχύει για κάθε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$ .

#### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων εμβαδών τριγώνων των οποίων η μία κορυφή είναι εσωτερικό σημείο παραλληλόγραμμου και η μία πλευρά τους είναι πλευρά αυτού του παραλληλόγραμμου.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε δύο τυχαία ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $AD$  μη συνευθειακά στην οθόνη του υπολογιστή.
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_1$  παράλληλη από το σημείο  $B$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AD$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_2$  παράλληλη από το σημείο  $D$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Gamma$  ως τομή των ευθειών  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $D\Gamma$  και  $B\Gamma$ .
- Αποκρύψτε τις ευθείες  $\varepsilon_1$  και  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  στο εσωτερικό του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$ .
- Κατασκευάστε τα τρίγωνα  $MAB$ ,  $MB\Gamma$ ,  $MΔ\Gamma$  και  $MΔA$ , τα εμβαδά των οποίων μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα.
- Υπολογίστε τα αθροίσματα των εμβαδών των τριγώνων  $EMAB+EMΔ\Gamma$  και  $EMB\Gamma+EMΔA$  και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Μετακινήστε το σημείο  $M$  στο εσωτερικό του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$  ή μεταβάλετε το παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$  μετακινώντας τις κορυφές του  $A$ ,  $B$  ή  $D$  στην οθόνη του υπολογιστή, και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Με βάση τον πίνακα που κατασκευάσατε, ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε; Αιτιολογήστε την.

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

Με βάση τις στήλες 3 και 6 του πίνακα που κατασκευάσατε, ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε για τις σχέσεις των αθροισμάτων των εμβαδών που εμφανίζονται σε αυτές όταν το  $M$  μετακινείται στο εσωτερικό του παραλληλόγραμμου  $ABΓΔ$ ; Μπορείτε να δώσετε αιτιολόγηση στην απάντησή σας;

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

Διερευνήστε αν ισχύει η σχέση των αθροισμάτων των εμβαδών που προαναφέρθηκαν σε οποιοδήποτε παραλληλόγραμμο  $ABΓΔ$ .

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

## Β' τάξη – Εμβαδόν τριγώνου

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 25 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Έστω ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και ένα σημείο  $M$  στο εσωτερικό του. Κατασκευάστε τα τρίγωνα  $ABM$ ,  $B\Gamma M$  και  $\Gamma A M$ . Να διερευνήσετε αν ισχύει κάποια σχέση μεταξύ των εμβαδών αυτών των τριγώνων και του εμβαδού του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

#### Στόχος

Να διερευνηθούν οι σχέσεις εμβαδών τριγώνων των οποίων η μία κορυφή είναι εσωτερικό σημείο ισόπλευρου τριγώνου και η μία πλευρά τους είναι πλευρά αυτού του τριγώνου.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma B$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A$  ως σημείο τομής των κύκλων με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma B$  και κέντρο  $B$  και ακτίνα  $B\Gamma$ .
- Αποκρύψτε τους κύκλους που προαναφέρθηκαν.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  στο εσωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ευθεία  $\varepsilon_1$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  από το σημείο  $M$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Delta$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_1$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $M\Delta$ .
- Αποκρύψτε την ευθεία  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε ευθεία  $\varepsilon_2$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  από το σημείο  $M$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $Z$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_2$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $MZ$ .
- Αποκρύψτε την ευθεία  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε ευθεία  $\varepsilon_3$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$  από το σημείο  $M$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $E$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_3$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $A\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $ME$ .
- Αποκρύψτε την ευθεία  $\varepsilon_3$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_4$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$  από το σημείο  $A$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $H$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_4$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .

- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $AH$ .
- Αποκρύψτε την ευθεία  $\varepsilon_4$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα ευθύγραμμα τμήματα  $MD$ ,  $MZ$ ,  $ME$  και  $AH$ .
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα τμήματα  $MD+MZ+ME$ .
- Μετακινήστε το σημείο  $M$  στο εσωτερικό του τριγώνου  $AB\Gamma$  ή μεταβάλετε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  μετακινώντας τις κορυφές του  $B$  ή  $\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή, και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

1. Με βάση τον πίνακα που κατασκευάσατε, ποια υπόθεση διατυπώνετε; Μπορείτε να την αιτιολογήσετε;

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

2. Διερευνήστε τη σχέση μεταξύ των εμβαδών των τριγώνων  $MAB$ ,  $MA\Gamma$ ,  $MB\Gamma$  και  $AB\Gamma$  με βάση την προηγούμενη εργασία και τα συμπεράσματα που διατυπώσατε.

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

## Β' τάξη – Εμβαδόν τραπεζίου

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 25 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Έστω τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB//\Gamma\Delta$ ). Από το μέσον  $E$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρνουμε την παράλληλη προς την  $A\Delta$ , η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα. Επίσης, η  $DE$  τέμνει την προέκταση της  $AB$  στο σημείο  $\Theta$ . Να διερευνήσετε αν υπάρχει κάποια σχέση που συνδέει το εμβαδόν του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  με το εμβαδόν του παραλληλόγραμμου  $AZH\Delta$  και με το εμβαδόν του τριγώνου  $A\Theta\Delta$ .

#### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων εμβαδού τραπεζίου, παραλληλόγραμμου και τριγώνου.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $A$  εξωτερικό τού  $\Delta\Gamma$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_1$  παράλληλη από το σημείο  $A$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta\Gamma$ .
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $B$  στην ευθεία  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $A\Delta$  και  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $E$  ως μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_2$  παράλληλη από το σημείο  $E$  στο ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $Z$  ως σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_2$  και  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $H$  ως σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_2$  και  $\Delta\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $E\Delta$ .
- Κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_3$  έτσι ώστε να διέρχεται τα σημεία  $E$  και  $\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Theta$  ως σημείο τομής των ευθειών  $\varepsilon_3$  και  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε το τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$ , το τρίγωνο  $A\Theta\Delta$  και το παραλληλόγραμμο  $AZH\Delta$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα εμβαδά των σχημάτων που προαναφέρθηκαν.
- Μεταβάλετε τη μορφή του τραπεζίου  $AB\Gamma\Delta$  μετακινώντας τα σημεία  $\Delta$ ,  $\Gamma$  και  $A$  στην οθόνη του υπολογιστή σας και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

- 1) Με βάση τον πίνακα που κατασκευάσατε, ποια υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε; Πώς αιτιολογείται;

Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

### Κεφάλαιο 3

#### Β' τάξη – Κανονικά πολύγωνα

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 25 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Έστω ένα κανονικό πεντάγωνο  $B_1B_2B_3B_4B_5$  εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$  και σημείο  $K$  στο εσωτερικό του. Έστω  $KA_1, KA_2, KA_3, KA_4$  και  $KA_5$  οι αποστάσεις του σημείου  $K$  από τις πλευρές του κανονικού πενταγώνου. Να διερευνήσετε πώς μεταβάλλεται η τιμή του αθροίσματος των αποστάσεων αυτών όταν το σημείο  $K$  μετακινείται στο εσωτερικό του κανονικού πενταγώνου ή όταν μεταβάλλεται η ακτίνα του κύκλου με κέντρο  $O$ .

#### Στόχος

Η διερεύνηση σχέσεων ανάμεσα στα αθροίσματα των αποστάσεων εσωτερικού σημείου κανονικού πολυγώνου από τις πλευρές του.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα κανονικό πεντάγωνο.
- Ονομάστε τις κορυφές του κανονικού πενταγώνου  $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5$  και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου σε αυτό  $O$ .
- Κατασκευάστε ένα εσωτερικό σημείο του πενταγώνου  $K$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_1$ , κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B_5B_1$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_2$ , κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B_2B_1$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_3$ , κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B_3B_2$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_4$ , κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B_4B_3$ .
- Κατασκευάστε μία ευθεία  $\varepsilon_5$ , κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $B_5B_4$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A_1$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_1$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B_5B_1$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A_2$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_2$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B_2B_1$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A_3$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_3$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B_3B_2$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A_4$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_4$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B_4B_3$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A_5$  ως σημείο τομής της ευθείας  $\varepsilon_5$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $B_5B_4$ .
- Αποκρύψτε τις ευθείες  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$  και  $\varepsilon_5$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $KA_1, KA_2, KA_3, KA_4$  και  $KA_5$ ,



μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα.

- Υπολογίστε το άθροισμα  $KA_1 + KA_2 + KA_3 + KA_4 + KA_5$  και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Μετακινήστε το σημείο  $K$  στο εσωτερικό του κανονικού πολυγώνου και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.
- Μεταβάλετε την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου και πινακοποιήστε αυτόματα τα προαναφερθέντα μεγέθη.

#### Διερεύνηση

A) Να διερευνήσετε τι συμβαίνει με τις αποστάσεις του σημείου  $K$  από τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου όταν αυτό μετακινείται στο εσωτερικό του κανονικού πολυγώνου.

#### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

#### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

B) Να διερευνήσετε τι συμβαίνει με τις αποστάσεις του σημείου  $K$  από τις πλευρές του κανονικού πολυγώνου όταν μεταβάλλεται η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του κανονικού πολυγώνου.

#### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

#### Αιτιολόγηση

.....

.....

.....

.....

#### Διατύπωση γενικεύσεων

.....

.....

.....

.....

**Β' τάξη – Κανονικά πολύγωνα – Ομοιότητα****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 25 λεπτά****Δραστηριότητα**

Έστω ένα κανονικό εννιάγωνο  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9$  εγγεγραμμένο σε κύκλο κέντρου  $O$ . Να διερευνήσετε πώς μεταβάλλεται η περίμετρος, το εμβαδόν, το απόστημα και η πλευρά αυτού του εννιαγώνου όταν μεταβάλλεται η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου. Επειδή σε κάθε μεταβολή της ακτίνας ένα νέο εννιάγωνο δημιουργείται, να μελετήσετε τις σχέσεις μεταξύ των περιμέτρων, εμβαδών πλευρών, αποστημάτων των εννιαγώνων που δημιουργούνται και των ακτίνων των περιγεγραμμένων σε αυτά κύκλων.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων περιμέτρων, ακτίνων, αποστημάτων, πλευρών και εμβαδών μεταξύ όμοιων πολυγώνων.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα κανονικό εννιάγωνο  $A_1, A_2, A_3 \dots A_9$ .
- Κατασκευάστε την πλευρά του  $A_1A_2$ .
- Κατασκευάστε το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου  $O$ .
- Κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon$  κάθετη από το κέντρο του κύκλου  $O$  στην πλευρά  $A_2A_3$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $M$  ως σημείο τομής της  $\varepsilon$  με το ευθύγραμμο τμήμα  $A_2A_3$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $OM$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $OA_3$ .
- Αποκρύψτε την  $\varepsilon$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την περίμετρο του κανονικού πολυγώνου.
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα το εμβαδόν του κανονικού πολυγώνου.
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την πλευρά  $A_1A_2$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα ευθύγραμμα τμήματα  $OM$  και  $OA_3$ .
- Μεταβάλετε την ακτίνα  $OA_3$  και πινακοποιήστε τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διερευνήστε τις σχέσεις μεταξύ των εμβαδών, των περιμέτρων, των πλευρών, των αποστημάτων και των ακτίνων των περιγεγραμμένων κύκλων σε όμοια πολύγωνα που δημιουργήθηκαν. Τι συμπεραίνετε;

### Απάντηση

Σχέσεις:

.....  
.....

- ακτίνων

.....  
.....

- πλευρών

.....  
.....

- αποστημάτων

.....  
.....

- περιμέτρων

.....  
.....

- εμβαδών

.....  
.....

### Διατύπωση συμπερασμάτων

.....  
.....  
.....  
.....

### Διατύπωση γενικεύσεων

.....  
.....  
.....  
.....

**B' τάξη – Μήκος τόξου και κύκλου****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 25 λεπτά****Δραστηριότητα**

Έστω ένα ισοπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$ . Να κατασκευάσετε τρεις κύκλους με κέντρα τις κορυφές του ισοπλευρου τριγώνου και ακτίνα το μισό της πλευράς του. Ποια άραγε είναι η σχέση ανάμεσα στην περίμετρο του ισοπλευρου τριγώνου  $AB\Gamma$  και του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $M_1M_2M_3$ ;

**Στόχος**

Η διερεύνηση σχέσεων ανάμεσα στην περίμετρο του καμπυλόγραμμου τριγώνου που δημιουργείται από τα εσωτερικά τόξα των κύκλων που κατασκευάζονται με κέντρα τις κορυφές ενός ισοπλευρου τριγώνου  $AB\Gamma$  και είναι εφαπτόμενοι στην πλευρά του τριγώνου  $AB\Gamma$  και στην περίμετρο του ισοπλευρου αυτού τριγώνου.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου  $B$  και ακτίνας  $B\Gamma$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου  $\Gamma$  και ακτίνας  $\Gamma B$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $A$  ως σημείο της τομής των κύκλων  $(B, B\Gamma)$  και  $(\Gamma, \Gamma B)$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$  και  $A\Gamma$ .
- Αποκρύψτε τους κύκλους  $(B, B\Gamma)$  και  $(\Gamma, \Gamma B)$ .
- Κατασκευάστε τα μέσα  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$  των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $B$  και ακτίνα  $BM_1$ .
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $AM_2$ .
- Κατασκευάστε τον κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma M_3$ .
- Κατασκευάστε το μήκος του κύκλου  $(A, AM_2) = \Pi_1$ .
- Κατασκευάστε το μήκος του κύκλου  $(\Gamma, \Gamma M_3) = \Pi_2$ .
- Κατασκευάστε το μήκος του κύκλου  $(B, BM_1) = \Pi_3$ .
- Υπολογίστε το άθροισμα  $\Pi = (\Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3)/6$  και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $BM_1$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα τα ευθύγραμμα τμήματα  $B\Gamma$  και  $BM_1$ .
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα το λόγο  $\Pi/BM_1$ .
- Μεταβάλετε το τρίγωνο  $AB\Gamma$  μετακινώντας τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

A) Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, μπορείτε να διατυπώσετε μια υπόθεση για τη σχέση της περιμέτρου του καμπυλόγραμμου τριγώνου  $M_1M_2M_3$  με την πλευρά του τριγώνου  $ABΓ$ ;

### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....

B) Κατά τη μεταβολή της πλευράς του ισοπλευρου τριγώνου στην οθόνη του υπολογιστή, υπάρχει σταθερή σχέση ανάμεσα στα μεγέθη που προαναφέρθηκαν;

### Απάντηση 1η:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

### Απάντηση 2η:

.....

.....

.....

.....

.....

.....

**B' τάξη – Εμβαδόν τόξου και κύκλου****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 25 λεπτά****Δραστηριότητα****Στόχος**

Ο προσδιορισμός σχέσεων μεταξύ εμβαδών μηνίσκων.

**Δραστηριότητα**

Να κατασκευάσετε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΓ. Να πάρετε στο μέσον του ημικυκλίου αυτού το σημείο Α. Στη συνέχεια, να κατασκευάσετε προς το μέρος αυτού του ημικυκλίου δύο ημικύκλια με διαμέτρους ΑΒ και ΑΓ. Να προσδιορίσετε τη σχέση των εμβαδών των δύο μηνίσκων που σχηματίζονται.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε έναν κύκλο κέντρου Ο.
- Κατασκευάστε ένα σημείο Γ πάνω στον κύκλο κέντρου Ο.
- Κατασκευάστε το σημείο Β ως συμμετρικό του σημείου Γ ως προς το κέντρο Ο.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.
- Κατασκευάστε την ευθεία ε κάθετη από το σημείο Ο στο ευθύγραμμο τμήμα ΒΓ.
- Κατασκευάστε το σημείο Α ως τομή της ευθείας ε και του κύκλου κέντρου Ο.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΟΑ.
- Αποκρύψτε την ευθεία ε.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ και ΑΓ.
- Κατασκευάστε τα σημεία  $M_1$  και  $M_2$  ως μέσα των ευθύγραμμων τμημάτων ΑΒ και ΑΓ.
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $M_1$  και ακτίνα  $M_1B$ .
- Κατασκευάστε κύκλο με κέντρο  $M_2$  και ακτίνα  $M_2Γ$ .
- Κατασκευάστε το τρίγωνο ΑΒΓ και μετρήστε το αυτόματα.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ΒΟ, μετρήστε το και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Υπολογίστε αυτόματα το εμβαδόν του κύκλου κέντρου  $M_1$  και ακτίνας  $M_1B$ , και ονομάστε το  $E_1$ .
- Υπολογίστε αυτόματα το εμβαδόν του κύκλου κέντρου  $M_2$  και ακτίνας  $M_2Γ$ , και ονομάστε το  $E_2$ .
- Υπολογίστε αυτόματα το εμβαδόν του κύκλου κέντρου Ο και ακτίνας ΟΒ, και ονομάστε το Ε.
- Υπολογίστε αυτόματα τις τιμές των  $E_{1/2}$ ,  $E_{2/2}$ ,  $E/2$ ,  $BO^2$  και  $E_{1/2}+E_{2/2}+E_{\tau\phi}-E/2$ .
- Μεταβάλετε το μέγεθος του κύκλου στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που εξασφαλίσατε, προσδιορίστε τη σχέση των εμβαδών των μηνίσκων που σχηματίζονται.

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## B' Τάξη Λυκείου – Τεχνολογική κατεύθυνση

### Κεφάλαιο 3

#### B' τάξη – Διανύσματα

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα – Πρόβλημα

Σε ένα αεροπλάνο που πετά και βρίσκεται στη θέση  $O$  ενεργούν η προωθητική δύναμη  $F_1$  (με οριζόντια διεύθυνση), η αντίσταση του αέρα  $F_2$ , η ανυψωτική δύναμη  $F_4$  και το βάρος του  $F_3$ . Να μελετήσετε: **A)** Πώς μεταβάλλεται η διεύθυνση της τροχιάς του αεροπλάνου όταν μεταβάλλονται οι δυνάμεις που επιδρούν πάνω σε αυτό. Να βρείτε, επίσης, το μέγεθος και τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης η οποία κινεί το αεροπλάνο. **B)** Πότε το αεροπλάνο χάνει ύψος και πότε ανεβαίνει. **Γ)** Πότε το αεροπλάνο κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά. **Δ)** Όταν η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη και ομαλή, πότε είναι επιβραδυνόμενη και πότε επιταχυνόμενη.

#### Στόχος

Η διερεύνηση της μεταβολής της συνισταμένης δύναμης όταν μεταβάλλονται οι συνιστώσες δυνάμεις.

#### Κατασκευή

- Εμφανίστε τους καρτεσιανούς άξονες.
- Κατασκευάστε ένα διάνυσμα στον άξονα  $ox$ , που να έχει αρχή στο κέντρο  $O$  των αξόνων και να αναπαριστά τη δύναμη  $F_1$ .
- Κατασκευάστε ένα άλλο διάνυσμα στον άξονα  $ox$ , που να έχει αρχή στο κέντρο  $O$  των αξόνων, αντίθετη φορά προς το διάνυσμα  $F_1$  και να αναπαριστά τη δύναμη  $F_2$ .
- Κατασκευάστε ένα διάνυσμα στον άξονα  $oy$ , που να έχει αρχή στο κέντρο  $O$  των αξόνων, με φορά προς τα πάνω και να αναπαριστά τη δύναμη  $F_4$ .
- Κατασκευάστε ένα άλλο διάνυσμα στον άξονα  $oy$ , που να έχει αρχή στο κέντρο  $O$  των αξόνων, με αντίθετη φορά προς το διάνυσμα  $F_4$  και να αναπαριστά το βάρος  $F_3$ .
- Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων  $F_1$  και  $F_3$ , και ονομάστε το  $F_5$ .
- Στη συνέχεια, βρείτε το άθροισμα των  $F_2$  και  $F_4$ , και ονομάστε το  $F_6$ .
- Βρείτε το άθροισμα των διανυσμάτων  $F_5$  και  $F_6$  και ονομάστε το  $SF$ . Ποια είναι η σημασία αυτού του διανύσματος;
- Μετρήστε και πινακοποιήστε τα διανύσματα  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  και  $SF$ , όπως και τη γωνία  $\omega$  των διανυσμάτων  $F_1$  και  $SF$ .
- Αποκρύψτε τους άξονες και τα διανύσματα  $F_5$  και  $F_6$ .



- Μεταβάλετε τα διανύσματα  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F_3$ ,  $F_4$  στην οθόνη του υπολογιστή και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διατυπώστε υποθέσεις για τις σχέσεις των μεγεθών που αναπαριστώνται σε αυτόν.

#### Υπόθεση 1

---

---

#### Υπόθεση 2

---

---

#### Υπόθεση 3

---

---

#### Υπόθεση 4

---

---

#### Άλλες υποθέσεις

---

---

---

---

### Ερωτήσεις

1. Να βρείτε πώς μεταβάλλεται η διεύθυνση της τροχιάς του αεροπλάνου όταν μεταβάλλονται οι δυνάμεις που επιδρούν πάνω σε αυτό. Να βρείτε, επίσης, το μέγεθος και τη διεύθυνση της συνισταμένης δύναμης η οποία κινεί το αεροπλάνο.

### Απάντηση

---

---

---

---

---

---

---

**Επιπλέον, καλείστε να απαντήσετε:**

**2.** Πότε το αεροπλάνο χάνει ύψος και πότε ανεβαίνει;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**3.** Πότε το αεροπλάνο κινείται προς τα δεξιά και πότε προς τα αριστερά;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

**4.** Πότε η κίνηση του αεροπλάνου είναι ευθύγραμμη και ομαλή, πότε είναι επιβραδυνόμενη και πότε επιταχυνόμενη;

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....



**B' τάξη – Συντεταγμένες στο επίπεδο****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 25 λεπτά****Δραστηριότητα**

Να μελετήσετε τη σχέση των συντεταγμένων του μέσου ενός διανύσματος ως προς τις συντεταγμένες των άκρων του.

**Στόχος**

Η διερεύνηση της σχέσης των συντεταγμένων του άκρου ενός διανύσματος με τις συντεταγμένες του μέσου του.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ορθοκανονικούς άξονες.
- Κατασκευάστε πλέγμα με βάση τους άξονες που προαναφέρθηκαν.
- Κατασκευάστε ένα διάνυσμα  $AB$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $M$  ως μέσον του διανύσματος  $AB$ .
- Κατασκευάστε τις συντεταγμένες των σημείων  $A$ ,  $B$  και  $M$ , και πινακοποιήστε τις αυτόματα.
- Μετακινήστε τα άκρα του διανύσματος  $AB$  στην οθόνη του υπολογιστή σας και πινακοποιήστε αυτόματα τις τιμές που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα δεδομένα του πίνακα που κατασκευάσατε, διερευνήστε τη σχέση των συντεταγμένων του μέσου  $M$  του διανύσματος  $AB$  με τις συντεταγμένες των άκρων του.

**Απάντηση**

.....

.....

.....

.....

.....

.....



## Β' τάξη – Βαρύκεντρο σχημάτων

### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 1 διδακτική ώρα

#### Δραστηριότητα

Έστω τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα των πλευρών του  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$ . Ποια μπορεί να είναι η τιμή του αθροίσματος των διανυσμάτων που έχουν αρχή τα σημεία  $A$ ,  $B$  και  $\Gamma$  και τέλος τα σημεία  $M_1$ ,  $M_2$  και  $M_3$  αντίστοιχα;

#### Στόχος

Ο προσδιορισμός σχέσεων μεταξύ των διανυσμάτων που έχουν ως αρχή τις κορυφές τριγώνου  $AB\Gamma$  και συντρέχουν στο βαρύκεντρό του.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα τρίγωνο  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε τα μέσα  $M_1$ ,  $M_2$ ,  $M_3$  των πλευρών του τριγώνου  $B\Gamma$ ,  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AM_1$ ,  $BM_2$  και  $\Gamma M_3$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Theta$  ως σημείο της τομής των ευθύγραμμων τμημάτων  $AM_1$ ,  $BM_2$  και  $\Gamma M_3$ .
- Κατασκευάστε τα διανύσματα  $AM_1$ ,  $BM_2$  και  $\Gamma M_3$ .
- Κατασκευάστε το διάνυσμα  $s_1$  ως άθροισμα των διανυσμάτων  $AM_1$  και  $BM_2$  ως προς εξωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .
- Κατασκευάστε το διάνυσμα  $s$  ως άθροισμα των διανυσμάτων  $s_1$  και  $\Gamma M_3$  ως προς εξωτερικό σημείο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

#### Διερεύνηση

Να μετακινήσετε τις κορυφές του τριγώνου  $AB\Gamma$  στην οθόνη του υπολογιστή και να διερευνήσετε τι συμβαίνει με το άθροισμα  $s$  των διανυσμάτων  $AM_1$ ,  $BM_2$  και  $\Gamma M_3$ . Να διατυπώσετε σχετική υπόθεση.

#### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....



**Τάξη B' – Βαρύκεντρο σύνθετων σχημάτων****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 1 διδακτική ώρα****Δραστηριότητα**

Έστω ένα τετράγωνο  $AB\Gamma\Delta$  και ένα ισόπλευρο τρίγωνο  $\Gamma\Delta E$ . Να διερευνήσετε τη σχέση των συντεταγμένων του κέντρου βάρους του σύνθετου σχήματος  $AB\Gamma E\Delta$  ως προς τις συντεταγμένες των κέντρων βάρους των σχημάτων τα οποία το συνθέτουν.

**Στόχος**

Η διερεύνηση των σχέσεων μεταξύ των συντεταγμένων των κέντρων βάρους των σχημάτων που συνθέτουν ένα σχήμα και του κέντρου βάρους του σύνθετου σχήματος που παράγεται: η περίπτωση της σύνθεσης ενός τετραγώνου και του ισόπλευρου τριγώνου το οποίο έχει πλευρά ίση με την πλευρά του τετραγώνου και εφάπτεται σε αυτήν.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε ένα ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $A$  και ακτίνα  $A\Delta$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $\Delta$  και ακτίνα  $\Delta A$ .
- Κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_1$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$  από το σημείο  $A$ .
- Κατασκευάστε την ευθεία  $\varepsilon_2$  κάθετη στο ευθύγραμμο τμήμα  $A\Delta$  από το σημείο  $\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $B$  ως τομή του κύκλου κέντρου  $A$  και ακτίνας  $A\Delta$  με ευθεία  $\varepsilon_1$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $\Gamma$  ως τομή του κύκλου κέντρου  $\Delta$  και ακτίνας  $\Delta A$  με ευθεία  $\varepsilon_2$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $AB$ ,  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε έναν κύκλο με κέντρο  $\Gamma$  και ακτίνα  $\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $E$  ως τομή του κύκλου κέντρου  $\Delta$  και ακτίνας  $\Delta A$  με τον κύκλο κέντρου  $\Gamma$  και ακτίνας  $\Gamma\Delta$ .
- Αποκρύψτε τους κύκλους κέντρου  $A$  και ακτίνας  $A\Delta$ , κέντρου  $\Delta$  και ακτίνας  $\Delta A$  και κέντρου  $\Gamma$  και ακτίνας  $\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $\Gamma E$ ,  $\Delta E$ ,  $B\Delta$  και  $\Gamma A$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $O'$  ως τομή των ευθύγραμμων τμημάτων  $B\Delta$  και  $\Gamma A$  και βαρύκεντρο του τετραγώνου  $AB\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $M$  ως μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma\Delta$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $EM$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $M_1$  ως μέσον του ευθύγραμμου τμήματος  $\Gamma E$ .
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta M_1$ .
- Κατασκευάστε το σημείο  $O''$  ως τομή των ευθύγραμμων τμημάτων  $E\Delta$  και



$\Delta M_1$  και βαρύκεντρο του τριγώνου  $\Gamma \Delta E$ .

- Αποκρύψτε το ευθύγραμμο τμήμα  $\Delta M_1$ .
- Κατασκευάστε τις συντεταγμένες των σημείων  $O'$  και  $O''$ .
- Μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα την πλευρά του τετραγώνου  $BA$ .
- Πινακοποιήστε αυτόματα την τεταγμένη του σημείου  $O'$  ως τεταγμένη του κέντρου βάρους του σύνθετου σχήματος όταν η πλευρά του τετραγώνου που το παράγει μεταβάλλεται μόνον ως προς τον άξονα  $x'x$ .
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα την παράσταση  $X = (\alpha/26) \cdot (14 + 3 \cdot \sqrt{3})$  ως τεταγμένη του κέντρου βάρους του σύνθετου σχήματος, σε συνάρτηση με την πλευρά  $a$  του τετραγώνου που το παράγει.
- Μεταβάλετε την πλευρά  $AD$  του τετραγώνου και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

### Διερεύνηση

Να διερευνήσετε τη σχέση μεταξύ των συντεταγμένων των κέντρων βάρους των σχημάτων που συνθέτουν ένα σχήμα, της πλευράς  $a$  του τετραγώνου που το παράγει και του κέντρου βάρους του σύνθετου σχήματος που παράγεται μέσω της διαδικασίας που προαναφέρθηκε.

### Απάντηση

.....

.....

.....

.....

.....

.....

## Κεφάλαιο 4

### B' τάξη – Παραβολή

#### 1 Δραστηριότητα

Χρόνος: 20 λεπτά

#### Δραστηριότητα

Με τι ισούται άραγε το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου M που διαγράφει παραβολική τροχιά από την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης που συνδέει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου M το οποίο διαγράφει παραβολική τροχιά από την εστία και τη διευθετούσα της παραβολής.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε ένα ορθοκανονικό σύστημα αξόνων.
- Κατασκευάστε ένα πλέγμα με βάση τη μονάδα των αξόνων που κατασκευάστηκαν.
- Κατασκευάστε την κωνική τομή (παραβολή) που διέρχεται τα σημεία A (-2, 4), B (-1, 1), A' (2, 4) και B' (1, 1).
- Κατασκευάστε την εστία της παραβολής E (0, -1/4).
- Κατασκευάστε το σημείο E' (0, -1/4).
- Κατασκευάστε την ευθεία δ παράλληλη στον άξονα χ'χ από το σημείο E' ως διευθετούσα της παραβολής.
- Κατασκευάστε την εξίσωση της παραβολής.
- Κατασκευάστε το M, τυχαίο σημείο πάνω στην παραβολή.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα ME, μετρήστε το και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Κατασκευάστε μία ευθεία ε κάθετη από το σημείο M στην ευθεία δ.
- Κατασκευάστε το σημείο K ως σημείο τομής της ευθείας δ με την ευθεία ε.
- Κατασκευάστε το ευθύγραμμο τμήμα MK, μετρήστε το και πινακοποιήστε το αυτόματα.
- Αποκρύψτε την ευθεία ε.
- Μετακινήστε το σημείο M πάνω στην παραβολή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα που κατασκευάσατε, τι είδους υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε;

### Διατύπωση υπόθεσης

---

---

## Β' τάξη – Έλλειψη

### 1 Δραστηριότητα

**Χρόνος: 25 λεπτά**

#### Δραστηριότητα

Με τι ισούται άραγε το άθροισμα των αποστάσεων ενός σημείου Μ που διαγράφει ελλειπτική τροχιά από τις εστίες της έλλειψης;

#### Στόχος

Η διερεύνηση της σχέσης που συνδέει το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου Μ το οποίο διαγράφει ελλειπτική τροχιά από τις εστίες της έλλειψης.

#### Κατασκευή

- Κατασκευάστε τους ορθοκανονικούς άξονες.
- Κατασκευάστε ένα πλέγμα με βάση τη μονάδα των αξόνων.
- Κατασκευάστε μία έλλειψη που να διέρχεται τα σημεία Α (0, 5), Α' (0, -5), Β' (0, -4), Β' (0, 4) και Κ (-2,5, 4).
- Κατασκευάστε τις εστίες Ε (0,3) και Ε' (0, -3).
- Κατασκευάστε την εξίσωση της έλλειψης.
- Κατασκευάστε ένα σημείο Μ πάνω στην έλλειψη.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΕ και ΜΕ', τα οποία μετρήστε και πινακοποιήστε αυτόματα.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα το άθροισμα ΜΕ+ΜΕ'.
- Μετακινήστε το σημείο Μ πάνω στην έλλειψη και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

#### Διερεύνηση

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα που κατασκευάσατε, τι είδους υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε;

#### Διατύπωση υπόθεσης

.....

.....



**B' τάξη – Υπερβολή****1 Δραστηριότητα****Χρόνος: 20 λεπτά****Δραστηριότητα**

Με τι ισούται άραγε η διαφορά των αποστάσεων ενός σημείου  $M$  που διαγράφει υπερβολική τροχιά από τις εστίες της υπερβολής.

**Στόχος**

Η διερεύνηση της σχέσης που συνδέει τη διαφορά των αποστάσεων τυχαίου σημείου  $M$  το οποίο διαγράφει υπερβολική τροχιά από τις εστίες της υπερβολής.

**Κατασκευή**

- Κατασκευάστε τους ορθοκανονικούς άξονες.
- Κατασκευάστε ένα πλέγμα με βάση τη μονάδα των αξόνων.
- Κατασκευάστε υπερβολή που να διέρχεται τα σημεία  $A(-6,72, 4)$ ,  $B(-4,23, 2)$ ,  $B'(4,31, 2)$ ,  $K1(-3, 0)$  και  $K2(3, 0)$ .
- Κατασκευάστε τις εστίες  $E(-3,62, 0)$  και  $E'(3,62, 0)$ .
- Κατασκευάστε την εξίσωση της υπερβολής.
- Κατασκευάστε ένα σημείο  $M$  πάνω στην υπερβολή.
- Κατασκευάστε τα ευθύγραμμα τμήματα  $ME$  και  $ME'$ , μετρήστε τα και πινακοποιήστε τα αυτόματα.
- Υπολογίστε και πινακοποιήστε αυτόματα τη διαφορά  $ME'-ME$ .
- Μετακινήστε το σημείο  $M$  πάνω στην υπερβολή και πινακοποιήστε αυτόματα τα μεγέθη που προαναφέρθηκαν.

**Διερεύνηση**

Με βάση τα στοιχεία του πίνακα που κατασκευάσατε, τι είδους υπόθεση μπορείτε να διατυπώσετε;

**Διατύπωση υπόθεσης**

.....

.....



## Παράρτημα

<b>ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΝΤΑΞΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ</b> <b>ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΚΑΙ ΑΓΓΛΙΚΗ ΟΡΟΛΟΓΙΑ ΤΟΥ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΗ</b>	
Σύνταξη – Αγγλικός Όρος	Συνάρτηση – Ελληνικός Όρος
ARCCOS(τιμή), arccos(), acos(), ArcCos()	Τόξο συνημιτόνου
ARGCH(τιμή), argch(), ArgCh()	Τόξο υπερβολικού συνημιτόνου
ARCSIN(τιμή), arcsin(), asin(), ArcSin()	Τόξο ημιτόνου
ARGSH(τιμή), argsh(), ArgSh()	Τόξο υπερβολικού ημιτόνου
ARCTAN(τιμή), arctan(), atan(), ArcTan()	Τόξο εφαπτομένης
ARGTH(τιμή), argth(), ArgTh()	Τόξο υπερβολικής εφαπτομένης
ROUND(τιμή), round(), Round()	Στρογγυλοποίηση (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
SQR(τιμή), sqr(), Sqr(), Sq()	Στο τετράγωνο
COS(τιμή), cos(), Cos()	Συνημίτονο
COSH(τιμή), cosh(), CosH(), ch()	Υπερβολικό συνημίτονο
EXP(τιμή), exp(), Exp()	Εκθέτης ex
Log10(τιμή), Log10(), lg()	Δεκαδικός λογάριθμος
LN(τιμή), ln(), Ln()	Νεπέριος λογάριθμος
MAX(τιμή 1, τιμή 2), max(n1, n2), Max (n1, n2)	Μέγιστη τιμή ενός συνόλου τιμών (n1, n2)
MIN (τιμή 1, τιμή 2), min (n1, n2), Min (n1, n2)	Ελάχιστη τιμή ενός συνόλου τιμών (n1, n2)
Π, Π, PI, pi, Pi	Τιμή του π
CEIL(τιμή), ceil(), Ceil()	Στρογγυλοποίηση προς τα πάνω (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
FLOOR(τιμή), floor(), Floor()	Στρογγυλοποίηση προς τα κάτω (στον πλησιέστερο ακέραιο αριθμό)
10^(τιμή)	Δυνάμεις του 10
SQRT(τιμή), sqrt(), Sqrt(), SqRt(), _	Τετραγωνική ρίζα
SIN(τιμή), sin (), Sin()	Συνημίτονο
SINH(τιμή), sinh(), SinH(), sh()	Υπερβολικό συνημίτονο
TAN(τιμή), tan(), Tan()	Εφαπτομένη
TANH(τιμή), tanh(), TanH(), th()	Υπερβολική εφαπτομένη
ABS(τιμή), abs(), Abs()	Απόλυτη τιμή
Random(), random(), Rand(), rand()	Τυχαίος αριθμός από 0 έως 1
INV	Ορίζει την αντίστροφη συνάρτηση για sin, cos, tan, pi, in, log





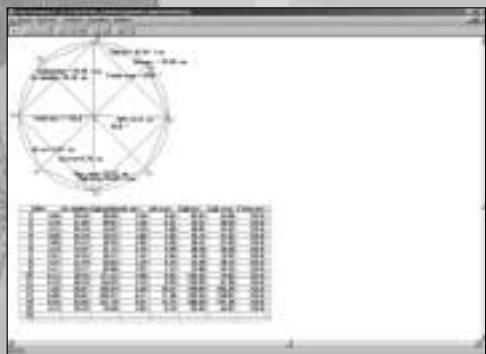
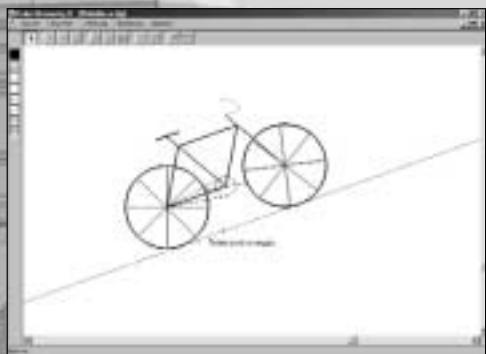
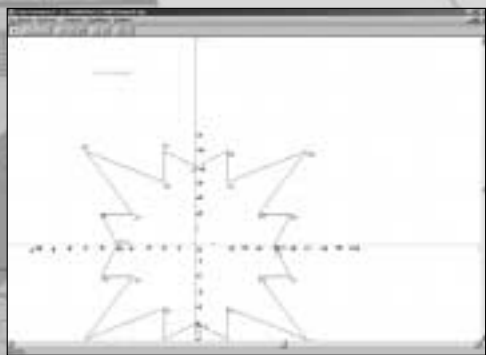
# Cabri - geometry II

## Το Cabri – geometry II

- είναι ένα δυναμικό περιβάλλον εκπαιδευτικού λογισμικού που υποστηρίζει την ανάπτυξη μιας διερευνητικής προσέγγισης στη διδασκαλία και στη μάθηση της γεωμετρίας.
- διαθέτει στοιχεία υψηλής αλληλεπίδρασης.
- αποτελεί ένα ανοικτό περιβάλλον μάθησης το οποίο διαθέτει εργαλεία στο μαθητή προκειμένου να μπορεί να επιλύει προβλήματα.
- υποστηρίζει τη διεπιστημονική προσέγγιση στη μάθηση της γεωμετρίας.

## Με το Cabri – geometry II μπορείτε

- να δημιουργήσετε και να αποθηκεύσετε στον υπολογιστή σας μακροκατασκευές για σημαντικές ή συχνά επαναλαμβανόμενες γεωμετρικές κατασκευές.
- να καταρτίσετε λίστα περιεχομένων, η οποία θα περιλαμβάνει τα θέματα στα οποία επιθυμείτε να επικεντρώσετε το ενδιαφέρον σας.
- να διερευνήσετε τις γεωμετρικές ιδιότητες για υποθέσεις ασκήσεων που βασίζονται στα πέντε ευκλείδια αξιώματα.
- να προσδιορίσετε γραφικά γεωμετρικούς τόπους.
- να αναδείξετε τα δυναμικά χαρακτηριστικά των σχημάτων με υλικό animation.
- να εκτυπώσετε επιφάνεια σχεδίου 8 1/2\*11.



Το λογισμικό **Cabri geometry II** εξελληνίστηκε και διανέμεται αρχικά για χρήση στα Γυμνάσια, Λύκεια και ΤΕΕ που συμμετέχουν στην **Οδύσσεια** – «Ελληνικά Σχολεία στην Κοινωνία της Πληροφορίας», το εθνικό πρόγραμμα που αφορά στην παιδαγωγική ένταξη των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και Επικοινωνίας (ΤΠΕ) σε όλο το εύρος του εκπαιδευτικού συστήματος, και είναι αποτέλεσμα μακροχρόνιου σχεδιασμού και υλοποίησης (1996-2001). Το 2001 στα 385 σχολεία της **Οδύσσειας** καθηγητές όλων των ειδικοτήτων αξιοποιούν υπολογιστές και δίκτυα στην κύρια καθημερινή σχολική δραστηριότητά τους. Στο **Σχολικό Εργαστήριο της Κοινωνίας της Πληροφορίας** υποστηρίζεται η διδασκαλία όλων των μαθημάτων με διάφορες εκπαιδευτικές δραστηριότητες. Στο Γ' ΚΠΣ προβλέπεται η χρηματοδότηση νέων δράσεων που στοχεύουν στην αξιοποίηση των ΤΠΕ στο σύνολο των Ελληνικών σχολείων.



Ελληνικά  
Σχολεία  
στην  
Κοινωνία  
της  
Πληροφορίας

## Η Οδύσσεια περιλαμβάνει:

– μεταπτυχιακή εκπαίδευση 95 επιμορφωτών (καθηγητές όλων των ειδικοτήτων) σε εξειδικευμένα ετήσια πανεπιστημιακά προγράμματα, οι οποίοι αναλαμβάνουν τη

– διαρκή **ενδοσχολική επιμόρφωση** των 5.500 εκπαιδευτικών που υπηρετούν στα σχολεία της **Οδύσσειας** -και όχι μόνο- ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν το

– διερευνητικό, διαθεματικό **εκπαιδευτικό λογισμικό** (48 πακέτα αναπτύχθηκαν εξ αρχής και 14 διεθνώς καταξιωμένα προϊόντα προσαρμόστηκαν) για όλες τις τάξεις Γυμνασίου και Λυκείου και τις διάφορες ειδικότητες καθηγητών. Το εκπαιδευτικό λογισμικό αξιοποιείται στα

– 385 σχολεία με **σχολικά εργαστήρια** (με τοπική και εξ αποστάσεως τεχνική υποστήριξη), δικτυωμένα στο **Πανελλήνιο Σχολικό Δίκτυο**.

Ο εξελληνισμός και η προσαρμογή του εκπαιδευτικού λογισμικού **Cabri geometry II** στο ελληνικό εκπαιδευτικό σύστημα υλοποιήθηκε στο πλαίσιο της **Κίρκης**, έργο της Δράσης II: «Εκπαιδευτικό λογισμικό» της **Οδύσσειας**. Η δημόσια χρηματοδότηση της προσαρμογής εξασφαλίζει ότι η τιμή πώλησης του παρόντος λογισμικού στην Ελληνική αγορά δεν υπερβαίνει την αντίστοιχη στη διεθνή αγορά.

Η **Οδύσσεια** χρηματοδοτείται από το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Εκπαίδευσης και Αρχικής Επαγγελματικής Κατάρτισης (ΕΠΕΑΕΚ, Β' και Γ' ΚΠΣ) και το Επιχειρησιακό Πρόγραμμα Κοινωνίας της Πληροφορίας του Γ' ΚΠΣ, του Υπουργείου Εθνικής Παιδείας και Θρησκευμάτων (Επιβλεψη: Διευθύνσεις Σπουδών Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης και Κοινωνικού Παισίου Στήριξης του Υπ.Π.Θ. Πιστοποίηση: Παιδαγωγικό Ινστιτούτο). Ο σχεδιασμός, η επιστημονική τεχνική στήριξη, ο συντονισμός και η διοικητική και οικονομική διαχείριση γίνονται από το Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών (Ε.Α. ΠΥ).

Στην υλοποίηση της **Οδύσσειας** συμμετέχουν πάνω από 1000 επιστήμονες, παιδαγωγοί, μηχανικοί και διοικητικοί υπάλληλοι, που εργάζονται σε 57 πανεπιστημιακά τμήματα, 53 εταιρίες και 18 μουσεία, ιδρύματα και ερευνητικά κέντρα.

## ΦΟΡΕΙΣ ΤΗΣ ΕΝΕΡΓΕΙΑΣ



## ΑΝΑΘΟΧΟΙ ΦΟΡΕΙΣ



## Κέντρο Πληροφόρησης Οδύσσειας:

Infodesk.Odyseia@cti.gr – <http://Odyseia.cti.gr/irkil/>